Zadatak 061 (MO, gimnazija)

Odredi broj realnih rješenja jednadžbe $\left|\sqrt{x^2-2\cdot x+1}-3\right|=3.$

A. 0 *B.* 1 *C.* 2 *D.* 3

Rješenje 061

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$\sqrt{a^2}=|a| \quad , \quad |x|=a\ ,\ a>0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-a \\ x_2=a \end{matrix}\right\} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

1.inačica

$$\left|\sqrt{x^2-2\cdot x+1}-3\right|=3 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \sqrt{x^2-2\cdot x+1}-3=-3 \\ \sqrt{x^2-2\cdot x+1}-3=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \sqrt{x^2-2\cdot x+1}=-3+3 \\ \sqrt{x^2-2\cdot x+1}=3+3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \sqrt{x^2-2\cdot x+1}=0 \\ \sqrt{x^2-2\cdot x+1}=6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \sqrt{(x-1)^2}=0 \\ \sqrt{(x-1)^2}=6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x-1|=0 \\ |x-1|=6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-1=0 \\ x-1=-6 \\ x-1=6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x=0+1 \\ x=-6+1 \\ x=6+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=1 \\ x_2=-5 \\ x_3=7 \end{matrix}\right\}.$$

Postoje tri realna rješenja.

Odgovor je pod D.

2.inačica

$$\left|\sqrt{x^2-2\cdot x+1}-3\right|=3 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \sqrt{x^2-2\cdot x+1}-3=-3 \\ \sqrt{x^2-2\cdot x+1}-3=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \sqrt{x^2-2\cdot x+1}=-3+3 \\ \sqrt{x^2-2\cdot x+1}=3+3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \sqrt{x^2-2\cdot x+1}=0 \\ \sqrt{x^2-2\cdot x+1}=6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{kvadriramo} \\ \text{jednadžbe} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \sqrt{x^2-2\cdot x+1}=0\ /^2 \\ \sqrt{x^2-2\cdot x+1}=6\ /^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \left(\sqrt{x^2-2\cdot x+1}\right)^2=0^2 \\ \left(\sqrt{x^2-2\cdot x+1}\right)^2=6^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2-2\cdot x+1=0 \\ x^2-2\cdot x+1=36 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2-2\cdot x+1=0 \\ x^2-2\cdot x+1-36=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2-2\cdot x+1=0 \\ x^2-2\cdot x-35=0 \end{matrix}\right\}.$$

Računamo rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 2 \cdot x + 1 = 0$.

$$x^2-2\cdot x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \,/\sqrt{\ } \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x_1=1.$$

Računamo rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 2 \cdot x - 35 = 0$.

$$x^2-2\cdot x-35=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2-2\cdot x-35=0 \\ a=1 \;,\; b=-2 \;,\; c=-35 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1 \;,\; b=-2 \;,\; c=-35 \\ x_{2,3}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-35)}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{2,3}=\frac{2\pm\sqrt{4+140}}{2} \Rightarrow x_{2,3}=\frac{2\pm\sqrt{144}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3}=\frac{2\pm 12}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2=\dfrac{2+12}{2} \\ x_3=\dfrac{2-12}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2=\dfrac{14}{2} \\ x_3=-\dfrac{10}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2=7 \\ x_3=-5 \end{matrix}\right\}.$$

Postoje tri realna rješenja.
Odgovor je pod D.

Vježba 061

Odredi broj realnih rješenja jednadžbe $\left|\sqrt{x^2-2\cdot x+1}-1\right|=1.$

$A.\ 0 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ 2 \qquad D.\ 3$

Rezultat: D.

Zadatak 062 (Tomislav, gimnazija)

Riješi jednadžbu $\left|\,|x+1|-3\,\right|=1.$

Rješenje 062

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|a|=b \;,\; b>0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=b \\ a=-b \end{matrix}\right\}.$$

Zadanu jednadžbu preoblikujemo tako da se raspadne na četiri linearne jednadžbe.

$$\left|\,|x+1|-3\,\right|=1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x+1|-3=1 \\ |x+1|-3=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x+1|=1+3 \\ |x+1|=-1+3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x+1|=4 \\ |x+1|=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+1=4 \\ x+1=-4 \\ x+1=2 \\ x+1=-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=4-1 \\ x=-4-1 \\ x=2-1 \\ x=-2-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=-5 \\ x_3=1 \\ x_4=-3 \end{array}\right\}.$$

Jednadžba ima četiri rješenja.

$$x \in \{-5, -3, 1, 3\}.$$

Vježba 062

Riješi jednadžbu $\left| \left| x+1 \right| -3 \right| -1 = 0.$

Rezultat: $x \in \{-5, -3, 1, 3\}.$

Zadatak 063 (Marija, ekonomska škola)

Koliki je umnožak rješenja jednadžbe $|2 \cdot x - 3| = |3 \cdot x + 5|$?

$$A. \frac{16}{5} \qquad B. \frac{64}{5} \qquad C. 20 \qquad D. 80$$

Rješenje 063

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|a| = |b| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right\}.$$

Zadanu jednadžbu preoblikujemo tako da se raspadne na dvije linearne jednadžbe.

$$|2 \cdot x-3| = |3 \cdot x+5| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot x-3 = 3 \cdot x+5 \\ 2 \cdot x-3 = -(3 \cdot x+5) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot x-3 = 3 \cdot x+5 \\ 2 \cdot x-3 = -3 \cdot x-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot x-3 \cdot x = 5+3 \\ 2 \cdot x+3 \cdot x = -5+3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x=8 \\ 5 \cdot x=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x=8 \;/\cdot(-1) \\ 5 \cdot x=-2 \;/:5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=-8 \\ x_2=-\frac{2}{5} \end{array}\right\}.$$

Umnožak rješenja iznosi:

$$x_1 \cdot x_2 = -8 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{-8}{1} \cdot \frac{-2}{5} = \frac{16}{5}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 063

Koliki je umnožak rješenja jednadžbe $\left|-3+2\cdot x\right|=\left|3\cdot x+5\right|$?

$$A.\ \frac{16}{5} \qquad B.\ \frac{64}{5} \qquad C.\ 20 \qquad D.\ 80$$

Rezultat: A.

Zadatak 064 (Lucija, gimnazija)

Za koje realne brojeve a jednadžba $\left|\left|x+1\right|-4\right|=5-a^{2}$ ima točno četiri rješenja?

Rješenje 064

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

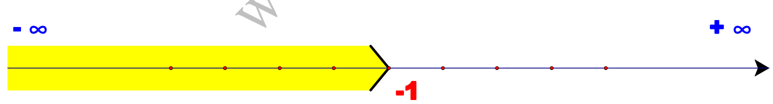
$$|x|=a\ ,\ a>0\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix} x_1=-a \\ x_2=a \end{matrix}\right\}\quad ,\quad |x|<a\ ,\ a>0\ \Rightarrow\ -a<x<a\ \Rightarrow\ x\in\left\langle -a,\ a\right\rangle.$$

$$|x|>a\ ,\ a>0\ \Rightarrow\ -\infty<x<-a\ \text{ i }\ a<x<\infty\ \Rightarrow\ x\in\left\langle -\infty,-a\right\rangle\cup\left\langle a,+\infty\right\rangle.$$

$$\sqrt{a^{2}}=|a|.$$

Postoje dvije mogućnosti:

- $x+1<0\ \Rightarrow\ x<-1$
- $x+1>0\ \Rightarrow\ x>-1.$



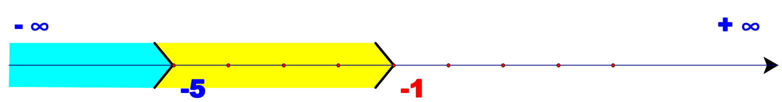
Za x < – 1 zadana jednadžba ima oblik

$$\left|\left|x+1\right|-4\right|=5-a^{2}\ \Rightarrow\ \left|-(x+1)-4\right|=5-a^{2}\ \Rightarrow\ \left|-x-1-4\right|=5-a^{2}\ \Rightarrow\ \left|-x-5\right|=5-a^{2}.$$

Ponovno se javljaju dvije mogućnosti:

- $-x-5<0\ \Rightarrow\ -x<5\ \Rightarrow\ -x<5\ /\cdot(-1)\ \Rightarrow\ x>-5$
- $-x-5>0\ \Rightarrow\ -x>5\ \Rightarrow\ -x>5\ /\cdot(-1)\ \Rightarrow\ x<-5.$

Iz sustava nejednadžbi x < – 1 i x < – 5 dobije se njihov zajednički skup rješenja (presjek).



$$\left.\begin{matrix} x<-1 \\ x<-5 \end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ x<-5$$

pa vrijedi:

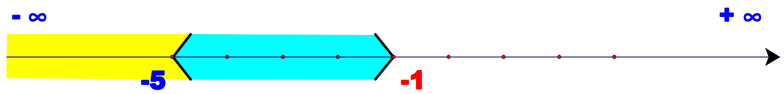
$$\left|-x-5\right|=5-a^{2}\ \Rightarrow\ -x-5=5-a^{2}\ \Rightarrow\ -x=5-a^{2}+5\ \Rightarrow\ -x=a^{2}=10-a^{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -x=a^2=10-a^2\ /\cdot(-1)\ \Rightarrow\ x=a^2-10.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} x=a^2-10 \\ x<-5 \end{array}\right\}\Rightarrow\ a^2-10<-5\ \Rightarrow\ a^2<-5+10\ \Rightarrow\ a^2<5. \qquad (1)$$

Iz sustava nejednadžbi x < – 1 i x > – 5 dobije se njihov zajednički skup rješenja (presjek).



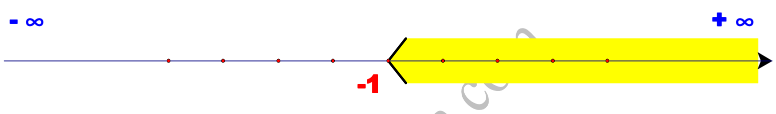
$$\left.\begin{array}{l} x<-1 \\ x>-5 \end{array}\right\}\Rightarrow\ -5<x<-1$$

pa vrijedi:

$$|-x-5|=5-a^2\ \Rightarrow\ -(-x-5)=5-a^2\ \Rightarrow\ x+5=5-a^2\ \Rightarrow\ x+5=5-a^2\ \Rightarrow\ x=-a^2.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} x=-a^2 \\ -5<x<-1 \end{array}\right\}\Rightarrow\ -5<-a^2<-1\ \Rightarrow\ -5<-a^2<-1\ /\cdot(-1)\ \Rightarrow\ 5>a^2>1\ \Rightarrow\ 1<a^2<5. \ (2)$$



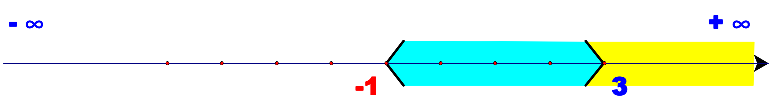
Za x > – 1 zadana jednadžba ima oblik

$$\big||x+1|-4\big|=5-a^2\ \Rightarrow\ |x+1-4|=5-a^2\ \Rightarrow\ |x-3|=5-a^2.$$

Ponovno se javljaju dvije mogućnosti:

- $x-3<0\ \Rightarrow\ x<3$
- $x-3>0\ \Rightarrow\ x>3.$

Iz sustava nejednadžbi x > – 1 i x < 3 dobije se njihov zajednički skup rješenja (presjek).



$$\left.\begin{array}{l} x>-1 \\ x<3 \end{array}\right\}\Rightarrow\ -1<x<3$$

pa vrijedi:

$$|x-3|=5-a^2\ \Rightarrow\ -(x-3)=5-a^2\ \Rightarrow\ -x+3=5-a^2\ \Rightarrow\ -x=5-a^2-3\ \Rightarrow\ -x=2-a^2\ \Rightarrow$$

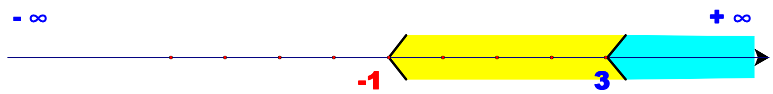
$$\Rightarrow\ -x=2-a^2\ /\cdot(-1)\ \Rightarrow\ x=a^2-2.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} x=a^2-2 \\ -1<x<3 \end{array}\right\}\Rightarrow\ -1<a^2-2<3\ \Rightarrow\ -1<a^2-2<3\ /+2\ \Rightarrow\ -1+2<a^2-2+2<3+2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1<a^2-2+2<5\ \Rightarrow\ 1<a^2<5. \qquad (3).$$

Iz sustava nejednadžbi x > – 1 i x > 3 dobije se njihov zajednički skup rješenja (presjek).



$$\left.\begin{array}{l} x > -1 \\ x > 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \; x > 3$$

pa vrijedi:

$$|x-3| = 5-a^2 \;\Rightarrow\; x-3 = 5-a^2 \;\Rightarrow\; x = 5-a^2+3 \;\Rightarrow\; x = 8-a^2.$$

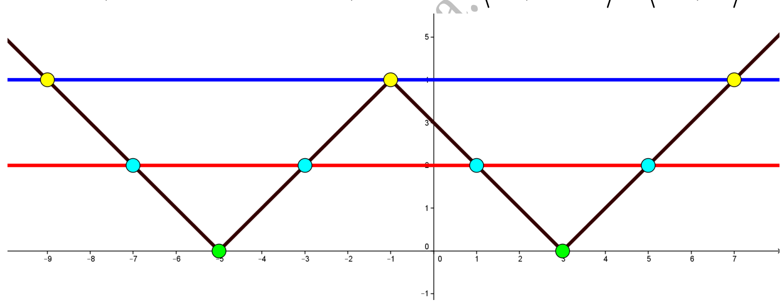
Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} x = 8-a^2 \\ x > 3 \end{array}\right\} \Rightarrow\; 8-a^2 > 3 \;\Rightarrow\; -a^2 > 3-8 \;\Rightarrow\; -a^2 > -5 \;\Rightarrow\; -a^2 > -5 \;/\cdot(-1) \;\Rightarrow\; a^2 < 5. \quad (4)$$

Budući da trebaju biti ispunjena sva četiri uvjeta (1), (2), (3) i (4), rješenje sustava kvadratnih nejednadžbi iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 < 5 \\ 1 < a^2 < 5 \\ 1 < a^2 < 5 \\ a^2 < 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 < 5 \\ 1 < a^2 < 5 \end{array}\right\} \Rightarrow\; 1 < a^2 < 5 \;\Rightarrow\; 1 < a^2 < 5 \;/\sqrt{} \;\Rightarrow\; 1 < |a| < \sqrt{5} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -\sqrt{5} < a < -1 \text{ i } 1 < a < \sqrt{5} \;\Rightarrow\; a \in \left\langle -\sqrt{5}, -1 \right\rangle \cup \left\langle 1, \sqrt{5} \right\rangle.$$



Vježba 064

Za koje realne brojeve a jednadžba $\left|4-|1+x|\right| = 5-a^2$ ima točno četiri rješenja?

Rezultat: $a \in \left\langle -\sqrt{5}, -1 \right\rangle \cup \left\langle 1, \sqrt{5} \right\rangle.$

Zadatak 065 (Anamarija, srednja škola)

Riješi jednadžbu $|2-x| - |2\cdot x-1| = 0.$

Rješenje 065

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Ako je $|a| = |b|$, onda je a = b ili a = – b.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Postoje dvije mogućnosti:

$$|2-x|-|2\cdot x-1|=0 \Rightarrow |2-x|=|2\cdot x-1| \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2-x=2\cdot x-1\\2-x=-(2\cdot x-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2-x=2\cdot x-1\\2-x=-2\cdot x+1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}-x-2\cdot x=-1-2\\-x+2\cdot x=1-2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-3\cdot x=-3\\x=-1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-3\cdot x=-3 \;/:(-3)\\x=-1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x_1=1\\x_2=-1\end{array}\right\}.$$

Vježba 065

Riješi jednadžbu $|x-2|-|1-2\cdot x|=0.$

Rezultat: $x_1=1 \; , \; x_2=-1.$

Zadatak 066 (Marija, ekonomska škola)

Koliko je $|x-6\cdot y|$, ako je x negativan, a y pozitivan broj?

$A.\; x-6\cdot y \qquad B.\; -x-6\cdot y \qquad C.\; x+6\cdot y \qquad D.\; -x+6\cdot y$

Rješenje 066

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\-x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$+1\cdot(+1)=+1 \quad , \quad +1\cdot(-1)=-1 \quad , \quad -1\cdot(+1)=-1 \quad , \quad -1\cdot(-1)=+1$$

Broj y je pozitivan pa je onda izraz $-6\cdot y$ negativan. Budući da je x također negativan, izraz $x-6\cdot y$ je negativan.

$$x-6\cdot y<0.$$

Zato vrijedi:

$$x-6\cdot y<0 \Rightarrow |x-6\cdot y|=[x-6\cdot y<0]=-(x-6\cdot y)=-x+6\cdot y.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 066

Koliko je $|-x-6\cdot y|$, ako su x i y negativni brojevi?

$A.\; x-6\cdot y \qquad B.\; -x-6\cdot y \qquad C.\; x+6\cdot y \qquad D.\; -x+6\cdot y$

Rezultat: B.

Zadatak 067 (Mica, gimnazija)

Riješite jednadžbu $||x+1|-2|=1.$

Rješenje 067

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$\left||x+1|-2\right| = 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x+1|-2=-1 \\ |x+1|-2=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x+1|=-1+2 \\ |x+1|=1+2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x+1|=1 \\ |x+1|=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x+1=-1 \\ x+1=1 \\ x+1=-3 \\ x+1=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-1-1 \\ x=1-1 \\ x=-3-1 \\ x=3-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-2 \\ x_2=0 \\ x_3=-4 \\ x_4=2 \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 067

Riješite jednadžbu $\left||x-1|-2\right| = 1$.

Rezultat: $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2,\ x_4 = 4.$

Zadatak 068 (Lux, gimnazija)

Skratite razlomak $\dfrac{x^2 - |x-1| - 1}{x^2 - 1}$.

Rješenje 068

Ponovimo!

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

S nulom se ne može dijeliti. Zato moramo odbaciti vrijednost nepoznanice x za koju je nazivnik jednak nuli.

Napravimo raspravu jer nazivnik ne smije biti jednak nuli.

$$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 1 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2} \neq \pm\sqrt{1} \Rightarrow x_{1,2} \neq \pm 1.$$

1.slučaj

Pretpostavimo da je $x - 1 \geq 0$.

$$x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet} \\ x\neq \pm 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x>1.$$

Sada je

$$|x-1|=x-1.$$

Dalje slijedi:

$$\frac{x^2-|x-1|-1}{x^2-1}=\left[\,|x-1|=x-1\,\right]=\frac{x^2-(x-1)-1}{x^2-1}=\frac{x^2-x+1-1}{x^2-1}=\frac{x^2-x+1-1}{x^2-1}=$$

$$=\frac{x^2-x}{x^2-1}=\frac{x\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x}{x+1}.$$

2.slučaj

Pretpostavimo da je x – 1 < 0.

$$x-1<0 \Rightarrow x<1.$$

Sada je

$$|x-1|=-(x-1)=-x+1=1-x.$$

Dalje slijedi:

$$\frac{x^2-|x-1|-1}{x^2-1}=\left[\,|x-1|=1-x\,\right]=\frac{x^2-(1-x)-1}{x^2-1}=\frac{x^2-1+x-1}{x^2-1}=\begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{grupiranja} \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\left(x^2-1\right)+(x-1)}{x^2-1}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)+(x-1)}{x^2-1}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)+(x-1)}{x^2-1}=\frac{(x-1)\cdot(x+1+1)}{x^2-1}=$$

$$=\frac{(x-1)\cdot(x+2)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{(x-1)\cdot(x+2)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x+2}{x+1}.$$

Vježba 068

Skratite razlomak $\dfrac{x^2+|x|}{x^2-1}$.

Rezultat: $\dfrac{x}{x-1}$ za $x\geq 0$ i $x\neq 1$; $\dfrac{x}{x+1}$ za $x<0$ i $x\neq -1$.

Zadatak 069 (Ella, gimnazija)

Izračunaj: $\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}$.

Rješenje 069

Ponovimo!

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x|$ = x.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x,

$x < 0$, je $|x| = -x$.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}=\left|\sqrt{2}-1\right|-\left|1-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=$$

$$=\begin{bmatrix}\sqrt{2}-1>0\\1-\sqrt{3}<0\\\sqrt{2}-\sqrt{3}<0\end{bmatrix}=\left|\underbrace{\sqrt{2}-1}_{+}\right|-\left|\underbrace{1-\sqrt{3}}_{-}\right|+\left|\underbrace{\sqrt{2}-\sqrt{3}}_{-}\right|=$$

$$=\sqrt{2}-1-\left(-\left(1-\sqrt{3}\right)\right)-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}-1+1-\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}=$$

$$=\sqrt{2}-1+1-\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}=-1+1-\sqrt{3}+\sqrt{3}=-1+1-\sqrt{3}+\sqrt{3}=-\sqrt{3}+\sqrt{3}=$$

$$=-\sqrt{3}+\sqrt{3}=0.$$

Vježba 069

Izračunaj: $\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}.$

Rezultat: 0.

Zadatak 070 (Ella, gimnazija)

Odredi $f\left(\sqrt{2}\right)$ ako je $f(x)=\left|\left|x-1\right|-1\right|$.

Rješenje 070

Ponovimo!
Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\-x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=\left|\left|x-1\right|-1\right|\\x=\sqrt{2}\end{array}\right\}\Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)=\left|\left|\sqrt{2}-1\right|-1\right|\Rightarrow\left[\sqrt{2}-1>0\right]\Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)=\left|\left|\underbrace{\sqrt{2}-1}_{+}\right|-1\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)=\left|\sqrt{2}-1-1\right|\Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)=\left|\sqrt{2}-2\right|\Rightarrow\left[\sqrt{2}-2<0\right]\Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)=\left|\underbrace{\sqrt{2}-2}_{-}\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)=-\left(\sqrt{2}-2\right)\Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}+2\Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)=2-\sqrt{2}.$$

Vježba 070

Odredi $f\left(\sqrt{3}\right)$ ako je $f(x)=\left|\left|x-1\right|-1\right|$.

Rezultat: $f\left(\sqrt{3}\right)=2-\sqrt{3}.$

Zadatak 071 (Ella, gimnazija)

Ako je $-1 < x < 1$, koliko je $\left|\left|\left|x-1\right|-2\right|-3\right|$?

Rješenje 071

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|-a| = |a| \quad , \quad |-a-b| = |a+b|.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

1.inačica

$$\left|\left|\left|x-1\right|-2\right|-3\right| = \left[\begin{matrix} -1 < x < 1 \\ x-1 < 0 \end{matrix}\right] = \left|\left|\left|\underbrace{x-1}_{-}\right|-2\right|-3\right| = \left|\left|-(x-1)-2\right|-3\right| = \left|\left|-x+1-2\right|-3\right| =$$

$$= \left|\left|-x-1\right|-3\right| = \left[\begin{matrix} -1 < x < 1 \\ -x-1 < 0 \end{matrix}\right] = \left|\left|\underbrace{-x-1}_{-}\right|-3\right| = \left|-(-x-1)-3\right| = \left|x+1-3\right| = \left|x-2\right| =$$

$$= \left[\begin{matrix} -1 < x < 1 \\ x-2 < 0 \end{matrix}\right] = \left|\underbrace{x-2}_{-}\right| = -(x-2) = -x+2 = 2-x.$$

2.inačica

$$\left|\left|\left|x-1\right|-2\right|-3\right| = \left[\begin{matrix} -1 < x < 1 \\ x-1 < 0 \end{matrix}\right] = \left|\left|\left|\underbrace{x-1}_{-}\right|-2\right|-3\right| = \left|\left|-(x-1)-2\right|-3\right| = \left|\left|-x+1-2\right|-3\right| =$$

$$= \left|\left|-x-1\right|-3\right| = \left|\left|x+1\right|-3\right| = \left[\begin{matrix} -1 < x < 1 \\ x+1 > 0 \end{matrix}\right] = \left|\left|\underbrace{x+1}_{+}\right|-3\right| = \left|x+1-3\right| = \left|x-2\right| =$$

$$= \left[\begin{matrix} -1 < x < 1 \\ x-2 < 0 \end{matrix}\right] = \left|\underbrace{x-2}_{-}\right| = -(x-2) = -x+2 = 2-x.$$

Vježba 071

Ako je $0 < x < 1$, koliko je $\left|\left|\left|x-1\right|-2\right|-3\right|$?

Rezultat: $2-x$.

Zadatak 072 (Ella, gimnazija)

Pojednostavni funkciju $f(x) = \sqrt{4 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 9} + 2 \cdot x$.

Rješenje 072

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$,

vrijedi | x | = x.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je | x | = – x.

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2 \quad , \quad \sqrt{a^2}=|a|.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Preoblikujemo zadanu funkciju.

$$f(x)=\sqrt{4\cdot x^2+12\cdot x+9}+2\cdot x \Rightarrow f(x)=\sqrt{(2\cdot x+3)^2}+2\cdot x \Rightarrow f(x)=|2\cdot x+3|+2\cdot x.$$

1. slučaj
Pretpostavimo da je

$$2\cdot x+3\geq 0$$

pa slijedi:

$$2\cdot x+3\geq 0 \Rightarrow 2\cdot x\geq -3 \Rightarrow 2\cdot x\geq -3 \;/:2 \Rightarrow x\geq -\frac{3}{2}.$$

Sada funkcija glasi:

$$f(x)=|2\cdot x+3|+2\cdot x \Rightarrow \begin{bmatrix} 2\cdot x+3\geq 0 \\ x\geq -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow f(x)=\Big|\underbrace{2\cdot x+3}_{+}\Big|+2\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=2\cdot x+3+2\cdot x \Rightarrow f(x)=4\cdot x+3.$$

2. slučaj
Pretpostavimo da je

$$2\cdot x+3<0$$

pa slijedi:

$$2\cdot x+3<0 \Rightarrow 2\cdot x<-3 \Rightarrow 2\cdot x<-3 \;/:2 \Rightarrow x<-\frac{3}{2}.$$

Sada funkcija glasi:

$$f(x)=|2\cdot x+3|+2\cdot x \Rightarrow \begin{bmatrix} 2\cdot x+3<0 \\ x<-\frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow f(x)=\Big|\underbrace{2\cdot x+3}_{-}\Big|+2\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=-(2\cdot x+3)+2\cdot x \Rightarrow f(x)=-2\cdot x-3+2\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=-2\cdot x-3+2\cdot x \Rightarrow f(x)=-3.$$

Ako ova dva slučaja objedinimo možemo zapisati:

$$f(x)=\begin{cases} 4\cdot x+3 \;,\; x\geq -\frac{3}{2} \\ -3 \;,\; x<-\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vježba 072

Pojednostavni funkciju $f(x)=2\cdot x+\sqrt{4\cdot x^2+12\cdot x+9}$.

Rezultat: $f(x)=\begin{cases} 4\cdot x+3 \;,\; x\geq -\frac{3}{2} \\ -3 \;,\; x<-\frac{3}{2} \end{cases}.$

Zadatak 073 (Ella, gimnazija)

Riješi jednadžbu $\left|\,|x-1|-3\,\right|=5.$

Rješenje 073

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|x|\ge 0 \text{ za svaki } x \quad , \quad |x|=a\ ,\ a>0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-a \\ x_2=a\end{matrix}\right\}.$$

$$\left|\,|x-1|-3\,\right|=5 \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x-1|-3=-5 \\ |x-1|-3=5\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x-1|=-5+3 \\ |x-1|=5+3\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} |x-1|=-2 \text{ nema smisla jer je } |x-1|\ge 0 \\ |x-1|=8\end{matrix}\right\} \Rightarrow |x-1|=8 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-1=-8 \\ x-1=8\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-8+1 \\ x=8+1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-7 \\ x_2=9\end{matrix}\right\}.$$

Vježba 073

Riješi jednadžbu $\left|\,|1-x|-3\,\right|=5.$

Rezultat: $x_1 = -7$, $x_2 = 9$.

Zadatak 074 (Ella, gimnazija)

Zapiši $f(x)=2-|x+1|$ bez znaka apsolutne vrijednosti.

Rješenje 074

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1. slučaj

Pretpostavimo da je

$$x+1\ge 0$$

pa slijedi:

$$x+1\ge 0 \Rightarrow x\ge -1.$$

Sada funkcija glasi:

$$f(x)=2-|x+1| \Rightarrow \begin{bmatrix} x+1\geq 0 \\ x\geq -1 \end{bmatrix} \Rightarrow f(x)=2-|\underbrace{x+1}_{+}| \Rightarrow f(x)=2-(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=2-x-1 \Rightarrow f(x)=-x+1.$$

2. slučaj

Pretpostavimo da je

$$x+1<0$$

pa slijedi:

$$x+1<0 \Rightarrow x<-1.$$

Sada funkcija glasi:

$$f(x)=2-|x+1| \Rightarrow \begin{bmatrix} x+1<0 \\ x<-1 \end{bmatrix} \Rightarrow f(x)=2-|\underbrace{x+1}_{-}| \Rightarrow f(x)=2-(-(x+1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=2+x+1 \Rightarrow f(x)=x+3.$$

Ako ova dva slučaja objedinimo možemo zapisati:

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 \ , \ x\geq -1 \\ x+3 \ , \ x<-1 \end{cases}.$$

Vježba 074

Zapiši $f(x)=-|x+1|+2$ bez znaka apsolutne vrijednosti.

Rezultat: $f(x)=\begin{cases} -x+1 \ , \ x\geq -1 \\ x+3 \ , \ x<-1 \end{cases}.$

Zadatak 075 (Ella, gimnazija)

Zapiši Koliko je $\sqrt{x^2+14\cdot x+49}-\sqrt{25-10\cdot x+x^2}$ za $x>6$?

Rješenje 075

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, \ x\geq 0 \\ -x, \ x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x|=x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x|=-x$.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2 \quad , \quad \sqrt{a^2}=|a|.$$

Preoblikujemo zadani izraz:

$$\sqrt{x^2+14\cdot x+49}-\sqrt{25-10\cdot x+x^2}=\sqrt{(x+7)^2}-\sqrt{(5-x)^2}=|x+7|-|5-x|=$$

$$=\begin{bmatrix} x>6 \\ x+7>0 \\ 5-x<0 \end{bmatrix}=|\underbrace{x+7}_{+}|-|\underbrace{5-x}_{-}|=x+7-(-(5-x))=x+7+5-x=x+7+5-x=12.$$

Vježba 075

Koliko je $-\sqrt{25-10\cdot x+x^2}+\sqrt{x^2+14\cdot x+49}$ za $x>6$?

Rezultat: 12.

Zadatak 076 (Rocky, gimnazija)

Pojednostavni izraz $\sqrt{a^2+3\cdot a-4+\sqrt{a^2-10\cdot a+25}}$, ako je $a<-1$.

Rješenje 076

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x\geq 0$, vrijedi $|x|=x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x<0$, je $|x|=-x$.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2 \quad , \quad \sqrt{a^2}=|a|.$$

Preoblikujemo zadani izraz:

$$\sqrt{a^2+3\cdot a-4+\sqrt{a^2-10\cdot a+25}}=\sqrt{a^2+3\cdot a-4+\sqrt{(a-5)^2}}=$$

$$=\sqrt{a^2+3\cdot a-4+|a-5|}=\left[\begin{array}{l} a<-1 \\ a-5<0 \end{array}\right]=\sqrt{a^2+3\cdot a-4+\left|\underbrace{a-5}_{-}\right|}=$$

$$=\sqrt{a^2+3\cdot a-4-(a-5)}=\sqrt{a^2+3\cdot a-4-a+5}=\sqrt{a^2+2\cdot a+1}=\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|=$$

$$=\left[\begin{array}{l} a<-1 \\ a+1<0 \end{array}\right]=\left|\underbrace{a+1}_{-}\right|=-(a+1)=-a-1.$$

Vježba 076

Pojednostavni izraz $\sqrt{\sqrt{a^2-10\cdot a+25}+a^2+3\cdot a-4}$, ako je $a<-1$.

Rezultat: $-a-1$.

Zadatak 077 (Rocky, gimnazija)

Riješi jednadžbu $|x+2|=2\cdot x-1$.

Rješenje 077

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x\geq 0$, vrijedi $|x|=x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x,

x < 0, je $|x| = -x$.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$|a| \ge 0 \text{ za svaki } a.$$

Uočimo da je na lijevoj strani jednadžbe

$$|x+2| = 2 \cdot x - 1$$

nenegativan broj (broj pozitivan ili nula)

$$|x+2| \ge 0.$$

Zato i broj s desne strane jednadžbe mora biti nenegativan:

$$2 \cdot x - 1 \ge 0 \Rightarrow 2 \cdot x \ge 1 \Rightarrow 2 \cdot x \ge 1 \; /:2 \Rightarrow x \ge \frac{1}{2}.$$

Ako jednadžba ima rješenja ona moraju zadovoljavati uvjet

$$x \ge \frac{1}{2}.$$

Sada razmatramo dvije mogućnosti:

$$|x+2| = 2 \cdot x - 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2 = 2 \cdot x - 1 \\ x+2 = -(2 \cdot x - 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2 = 2 \cdot x - 1 \\ x+2 = -2 \cdot x + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - 2 \cdot x = -1 - 2 \\ x + 2 \cdot x = 1 - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x = -3 \\ 3 \cdot x = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x = -3 \; / \cdot (-1) \\ 3 \cdot x = -1 \; /:3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\frac{1}{3} \text{ nije rješenje jer ne zadovoljava uvjet } x \ge \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 3.$$

Vježba 077

Riješi jednadžbu $|x+2| + 1 = 2 \cdot x$.

Rezultat: 3.

Zadatak 078 (Rocky, gimnazija)

Riješi jednadžbu $|2 \cdot x - 1| = |2 - 3 \cdot x|$.

Rješenje 078

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$|a| = |b| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right\}.$$

Jednadžba daje dvije mogućnosti:

$$\left|2\cdot x-1\right|=\left|2-3\cdot x\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\cdot x-1=2-3\cdot x \\ 2\cdot x-1=-\left(2-3\cdot x\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\cdot x-1=2-3\cdot x \\ 2\cdot x-1=-2+3\cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\cdot x+3\cdot x=2+1 \\ 2\cdot x-3\cdot x=-2+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5\cdot x=3 \\ -x=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5\cdot x=3 \ /:5 \\ -x=-1 \ /\cdot(-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{3}{5} \\ x_2=1 \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 078

Riješi jednadžbu $\left|2-3\cdot x\right|=\left|2\cdot x-1\right|$.

Rezultat: $x_1=\frac{3}{5}$, $x_2=1$.

Zadatak 079 (BBB, tehnička škola)

Riješi nejednadžbu $\left|x-2\right|\le 5$.

Rješenje 079

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x\ge 0$, vrijedi $|x|=x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x<0$, je $|x|=-x$.

Udaljenost točaka na brojevnom pravcu

Ako su zadane dvije točke A i B na pravcu s koordinatama x_1, x_2 (što kraće zapisujemo kao $A(x_1)$, $B(x_2)$), onda se udaljenost točaka A i B zapisuje formulom

$$\left|AB\right|=\left|x_2-x_1\right|.$$

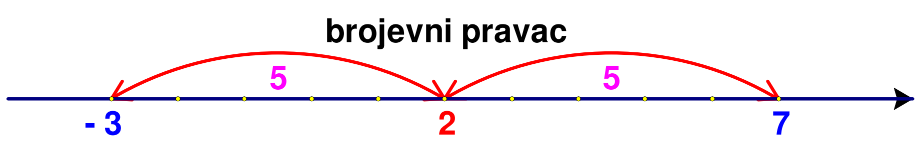
$$\left|x\right|\le a \ , \ a>0 \Rightarrow -a\le x\le a \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\ge -a \\ x\le a \end{matrix}\right\}.$$

$$\left|x\right|\le a \ , \ a=0 \Rightarrow x=0.$$

$$\left|x\right|\le a \ , \ a<0 \Rightarrow \text{nema rješenja.}$$

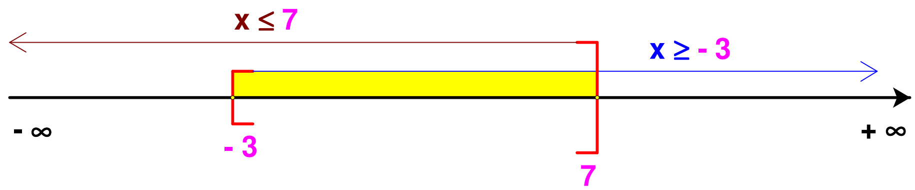
$$a\le x\le b \ , \ c\in R \Rightarrow a+c\le x+c\le b+c.$$

1.inačica



Trebamo odrediti sve realne brojeve x kojima je udaljenost od broja 2 manja ili jednaka 5.
To su očito svi realni brojevi između – 3 i 7, uključujući i njih pa je skup rješenja zadane nejednadžbe segment $\left[-3, 7\right]$.

2.inačica



Preoblikujemo zadanu nejednadžbu tako da dobijemo sustav nejednadžbi.

$$\left|x-2\right|\le 5 \Rightarrow -5\le x-2\le 5 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-2\ge -5 \\ x-2\le 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\ge -5+2 \\ x\le 5+2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\ge -3 \\ x\le 7 \end{matrix}\right\}.$$

Skup rješenja je presjek (zajednički dio) rješenja nejednadžbe x ≥ – 3 i nejednadžbe x ≤ 7. To je segment $\left[-3,\ 7\right]$.

3.inačica

Preoblikujemo zadanu nejednadžbu.

$$\left|x-2\right|\le 5 \Rightarrow -5\le x-2\le 5 \Rightarrow -5\le x-2\le 5\ /+2 \Rightarrow -5+2\le x-2+2\le 5+2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -5+2\le x-2+2\le 5+2 \Rightarrow -3\le x\le 7 \Rightarrow x\in\left[-3,\ 7\right].$$

Skup rješenja je segment $\left[-3,\ 7\right]$.

Vježba 079

Riješi nejednadžbu $\left|x-2\right|\le 3$.

Rezultat: $\left[-1,\ 5\right]$.

Zadatak 080 (Ella, gimnazija)

Odredi umnožak rješenja jednadžbe $\left|\left|2-3\cdot x\right|-3\right|=4$.

Rješenje 080

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj | x | koji određujemo na ovaj način:

$$\left|x\right|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi | x | = x.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je | x | = – x.

$$\left|a\right|\ge 0 \text{ za svaki } a.$$

$$\left|x\right|\ge 0 \text{ za svaki } x \quad , \quad \left|x\right|=a\ ,\ a>0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-a \\ x_2=a \end{matrix}\right\}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\ne 0\ ,\ n\ne 1.$$

$$b\cdot\frac{a}{b}=a.$$

$$\left|\left|2-3\cdot x\right|-3\right|=4 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \left|2-3\cdot x\right|-3=-4 \\ \left|2-3\cdot x\right|-3=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \left|2-3\cdot x\right|=-4+3 \\ \left|2-3\cdot x\right|=4+3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} |2-3\cdot x| = -1 \text{ nema smisla jer je } |2-3\cdot x| \geq 0 \\ |2-3\cdot x| = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow |2-3\cdot x| = 7 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2-3\cdot x = -7 \\ 2-3\cdot x = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3\cdot x = -7-2 \\ -3\cdot x = 7-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3\cdot x = -9 \\ -3\cdot x = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3\cdot x = -9 \;/:(-3) \\ -3\cdot x = 5 \;/:(-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -\frac{5}{3} \end{array}\right\}.$$

Umnožak rješenja iznosi:

$$x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -5.$$

Vježba 080

Odredi umnožak rješenja jednadžbe $||3\cdot x-2|-3| = 4.$

Rezultat: – 5.